1. FORME NORMALI IN DINAMICA HAMILTONIANA

Problema centrale nei sistemi dinamici hamiltoniani è l'analisi della stabilità e della struttura geometrica delle orbite e può essere affrontato attraverso le forme normali e la teoria della coniugazione [1], [2].

Data una funzione $H(x)$ definita su un compatto $D \subset R^{2d}$, detto spazio delle fasi, le soluzioni delle equazioni di Hamilton

$$(1.1) \qquad \frac{dx}{dt} = J\,\frac{\partial H}{\partial x} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità dxd, definiscono una applicazione $\mathcal{H}_t : RxD \to D$ detta flusso hamiltoniano. I flussi hamiltoniani $x' = \mathcal{H}_t(x)$ hanno vincoli geometrici espressi dalla condizione detto di canonicità o simpletticità

$$(1.2) \qquad \tilde{M}\,J\,M = J \quad , \quad M_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$$

Consideriamo un altro flusso $x = \mathcal{F}_\varepsilon(X)$ definito da

$$(1.3) \qquad \frac{dx}{d\varepsilon} = F(x,\varepsilon)$$

e notiamo che se $x = (q,p)$, $X = (Q,P)$ la forma differenziale

$$(1.4) \qquad df = pdq + QdP$$

è esatta e quindi il flusso è implicitamente definito da

$$(1.5) \qquad p = \frac{\partial f}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial P}$$

Consideriamo quindi la trasformazione indotta da $\mathcal{F}_\varepsilon$ su H

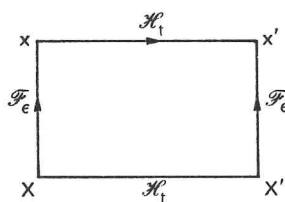
$$(1.5) \qquad H(\mathcal{F}_\varepsilon(X)) = K(X,\varepsilon)$$

si dice allora che $H(x)$ e $K(x)$ sono coniugati da $\mathscr{F}_\varepsilon$. Se invece

$$H(\mathscr{F}_\varepsilon(X)) = H(X) \tag{1.6}$$

si dice che H è invariante. Se il flusso $\mathscr{F}_\varepsilon$ è autonomo cioè $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 0$ allora si ha anche

$$F(\mathscr{H}_t(x)) = F(x) \tag{1.7}$$

ed i due flussi commutano

<u>Forme normali</u>. Sia ora $D = T^d \times S$ dove S è una sfera in R^d e T^d il toro di dimensione d e sia $x = (\phi, j)$ con $\phi \in T^d$, $j \in S$. Consideriamo inoltre il gruppo G prodotto tensore delle rotazioni nei piani di fase. Se $\mathscr{R}_\alpha \in G$ con $\alpha \in R^d$

$$\mathscr{R}_\alpha x = (\phi + \alpha, j) \tag{1.8}$$

Considereremo anche un sottogruppo G_L di G i cui elementi sono $\mathscr{R}_\alpha$ con la restrizione

$$k = 0 \qquad k \in L \subset Z^d \qquad \dim L = r .$$

Diciamo che H è in forma normale rispetto a G se

(1.9) $$H(\mathscr{R}_\alpha x) = H(x) \qquad \forall \mathscr{R}_\alpha \in G$$

e si parla di forma normale non risonante.

Diciamo che H è in forma normale rispetto a G_L se vale

(1.10) $$H(\mathscr{R}_\alpha x) = H(x) \qquad \forall \mathscr{R}_\alpha \in G_L$$

e si parla di forma normale risonante.

Se H è in forma normale non risonante allora

(1.11) $$H = H(j_1,\dots,j_d)$$

ed il suo flusso $\mathscr{H}_t$ è dato da

(1.12) $$\mathscr{H}_t x = (\phi + \omega t, j) \qquad \omega = \frac{\partial H}{\partial j}$$

Se la frequenza ω è non risonante cioè

(1.13) $$\omega k \neq 0 \qquad \forall k \in Z^d \setminus 0$$

allora ogni orbita è densa su T^d; se invece ω è risonante rispetto a $L \subset Z^d$ con dim. L = r

(1.14) $$\omega \cdot k = 0 \quad k \in L \quad , \quad \omega \cdot k \neq 0 \quad \forall k \notin L$$

allora ogni orbita è densa su un toro $T^{d-\ell}$.

Osserviamo che se H è in forma normale rispetto a G_L può essere scritto nella forma

(1.15) $$H(x) = \sum_{k \in L} H_k(j) \; e^{ik\cdot\phi}$$

Consideriamo ora un hamiltoniano H che sia "vicino" ad un hamiltoniano H_0 in forma normale non risonante

(1.16) $$H(x,\varepsilon) = H_0(j) + \varepsilon\, V(\phi,\, j)$$

e indichiamo con $\omega = \frac{\partial H_o}{\partial j}$ la frequenza di H_0.

Le condizioni perché esista una trasformazione simplettica $x = \mathscr{F}_\varepsilon(X)$ con $x = (\phi,j)$, $X = (\Phi,J)$, $\phi \in T^d$ che coniughi H con una forma normale $\hat{H}$

(1.17) $$H(\mathscr{F}_\varepsilon(X)) = \hat{H}(X;\varepsilon)$$

sono espresse dal seguente

<u>Teorema</u>. Se ω è non risonante allora H è coniugabile con una forma normale (non risonante) rispetto al gruppo G; se ω è risonante rispetto a L allora H è coniugabile con una forma normale (risonante) rispetto a G_L.

La condizione di coniugazione è verificata dalle serie formali in ε se V è un polinomio trigometrico.

<u>Dimostrazione</u>. Consideriamo una funzione generatrice $F(\phi,J;\varepsilon)$ per definire la trasformazione canonica $\mathscr{F}_\varepsilon$ e scriviamo il suo sviluppo in ε nella forma

(1.18) $$F(\phi,J;\varepsilon) = \phi J + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, F_n(\phi,J)$$

L'equazione di coniugazione diventa allora l'equazione di Hamilton-Jacobi e si scrive

(1.19) $$H_0\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right) + \varepsilon\, V\left(\phi, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) = \hat{H}(\phi, J; \varepsilon)$$

Sviluppando la 1.19 in serie nella variabile ε e confrontando i termini di ordine ε^n si ottiene la ricorrenza

(1.20) $$\omega \frac{\partial F_n}{\partial \phi}(\phi, J) + Q_n(\phi, J) = \hat{H}_n(J, \phi)$$

dove

(1.21) $$\hat{H} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n H_n(J, \phi)$$

e Q_n dipende solo da termini noti all'ordine n.

Se indichiamo con $F_{n,k}(J)$, $Q_{n,k}(J)$, $\hat{H}_{n,k}(J)$ le componenti di Fourier di $F_n(\phi,J)$, $Q_n(\phi,J)$ e $\hat{H}_n(\phi,J)$ si trova

(1.22) $$i\omega \cdot k \;\; F_{n.k} + Q_{n,k} = \hat{H}_{n,k}$$

Se ω è non risonante si ha

$$H_{n,k} = 0 \quad k \neq 0 \quad , \quad H_{n,0} = Q_{n,0} \quad , \quad F_{n,k} = i\,\frac{Q_{n,k}}{\omega \cdot k} \quad k \neq 0$$

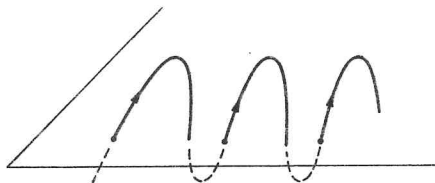
mentre se ω è risonante rispetto ad L si ha

$$H_{n,k} = 0 \quad k \notin L, \quad H_{n,k} = Q_{n,k} \quad k \in L$$

$$F_{n,k} = i\,\frac{Q_{n,k}}{\omega \cdot k} \; , \quad k \notin L$$

Le componenti $F_{n,k}$ con k L rimangono arbitrarie.

<u>Mappe hamiltoniane</u>. Chiamiamo mappa una applicazione simplettica

T ed orbita di T la successione $\{x_n = T^n x\}$ dove $T^n = ToTo..oT$. Le mappe sono associate ai flussi mediante la sezione delle orbite del flusso con una superficie (Poincaré)

Anche per le mappe si definiscono le forme normali rispetto al gruppo G del prodotto diretto dalle rotazioni nei piani coordinati

$$(1.23) \qquad T(\mathcal{R}_\alpha(x)) = \mathcal{R}_\alpha(T(x))$$

Definendo $x_k = \sqrt{2j_k}\ \sin\phi_k$, $p_k = \sqrt{2j_k}\ \cos\phi_k$ una mappa $x' = T(x)$ in forma normale può essere scritta nella forma

$$(1.25) \qquad \phi_k' = \phi_k + \Omega_k(j) \quad j_k' = j_k \qquad k=1,\dots,n$$

oppure posto $z_k = x_k + ip_k$ nella forma

$$(1.26) \qquad z_k' = e^{i\Omega_k(z,z_1^*,\dots,z_n z_n^*)} z_k \qquad k=1,\dots,n$$

dove $\Omega_k(j) = \frac{\partial H}{\partial j_k}(j)$.

Data dunque una mappa lineare perturbata

$$(1.27) \qquad z_k' = e^{i\omega_k} z_k + f_k(z,z^*)$$

ove la frequenza della parte lineare è costante, la forma normale con cui può essere coniugata è una rotazione i cui angoli dipendono dalle distanze dall'o

rigine in ciascun piano coordinato (ciò se ω è non risonante) [3], [4]. Tali angoli di rotazione Ω sono dunque una caratteristica intrinseca di ciascuna orbita se $\Omega = \Omega(j)$ è $1 \to 1$ ed è questa la causa delle difficoltà del problema della coniugazione in meccanica hamiltoniana e che rende la sua soluzione possibile solo localmente cioè per ciascuna orbita.

Un problema che le caratteristiche analoghe senza avere questo aspetto di località si incontra nella teoria della coniugazione per mappe olomorfe.

2. CONIUGAZIONE PER MAPPE OLOMORFE

CI limiteremo allo studio delle forme normali per mappe $z' = F(z)$ dove $F(z)$ è olomorfa in un disco $|z| < R$ di C, ed ha nell'origine un punto fisso cioè $F(0) = 0$.

SIa allora $R(z) = \lambda z$ una trasformazione lineare. Diciamo che F è in forma normale rispetto al gruppo delle trasformazioni lineari che preservano l'origine se

$$F \circ R = R \circ F \tag{2.1}$$

Se scriviamo

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} f_n z^n \tag{2.2}$$

la condizione 2.1 diventa

$$F(\lambda z) - \lambda F(z) = 0 \Rightarrow f_n(\lambda^n - \lambda) = 0 \tag{2.3}$$

Si hanno dunque due possibilità:

a) $\lambda^n \neq \lambda$ per $\forall n>1$ allora $f_n = 0$ $n > 1$ e $F(z)$ assume la forma normale non risonante

$$F(z) = f_0 z \tag{2.4}$$

b) $\lambda^n = \lambda$ per $n = \ell q + 1$ con $\ell \in Z$ allora $f_n=0$ per $n \neq \ell q + 1$ e $F(z)$ assume la forma normale risonante .

$$F(z) = z[f_0 + w(z^q)] \tag{2.5}$$

dove $w(x)$ è olomorfa in un disco e $w(0) = 0$.

Notiamo che se $|\lambda| \neq 1$ siamo sempre nel caso a) mentre se $|\lambda| = 1$ allora detto $\lambda = e^{i\omega}$ siamo nel caso b) se $\frac{\omega}{2\pi}$ è irrazionale, mentre se $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{p}{q}$ con p,q primi siamo nel caso b). In questo ultimo caso il gruppo delle trasformazioni $R(z) = \lambda z$ è discreto e formato solo da q elementi.

Coniugazione Diamo una mappa olomorfa non lineare vale il seguente teorema sulla coniugazione formale.

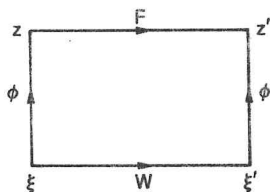
Teorema. Sia $F(z)$ una mappa olomorfa

$$z' = F(z) = \lambda z + f(z) \tag{2.6}$$

allora se $\lambda^n \neq \lambda$ per $n > 1$ risulta coniugata da una serie formale con la sua parte lineare, se $\lambda^{q+1} = \lambda$ allora è coniugata con la forma normale risonante espressa da 2.5.

Dimostrazione. Sia

$$z = \Phi(\xi) = \xi + \phi(\xi) \qquad \phi(0) = \phi'(0) = 0 \tag{2.7}$$

la trasformazione e $\xi' = W(\xi)$ la forma normale.

L'equazione di coniugazione

(2.8) $F \circ \Phi = \Phi \circ W$

diventa nel caso in cui $W(\xi) = \lambda\xi$

(2.9) $\phi(\lambda\xi) - \lambda\phi(\xi) = f(\xi + \phi(\xi))$

Se allora scriviamo $\phi(\xi) = \sum_{n\geq 2} \phi_n \; \xi^n$ si ha

(2.10) $(\lambda^n - \lambda)\, \phi_n = \tau_n$

dove

(2.11) $$\tau_n = \sum_{s=2}^{n} f_s \sum_{\substack{k_1+\dots+k_s=n \\ k_j\geq 1}} \phi_{k_1} \cdots \phi_{k_s}$$

e perciò i τ_n dipendono solo da termini noti all'ordine n. Allora se $\lambda^n \neq \lambda$ per $n>1$ l'equazione 2.1 determina ϕ_n per $n\geq 2$.

Se invece $\lambda^n = \lambda$ per $n = \ell\phi + 1$ chiaramente 2.10 non ammette soluzione. Se però

(2.12) $$W(\xi) = \lambda\xi + \xi\, w(\xi^{q})$$

dove $w(z) = \sum_{n\geq 1} w_n z^n$ allora l'equazione di coniugazione si scrive

$$\phi(\lambda\xi)-\lambda\phi(\xi) + \xi w(\xi^{\phi}) = f(\xi+\phi(\xi)) -$$

(2.13)

$$- [\phi(\lambda\xi + \xi w(\xi\ )) - \phi(\lambda\xi)]$$

Infatti da questa equazione si ha

(2.14) $$(\lambda^n - \lambda)\phi_n + w_\ell\, \delta_{n,\ell q+1} = \sigma_n$$

dove i σ_n dipendono solo da quantità note all'ordine n. L'equazione 2.14 è risolta da

(2.15) $$w_\ell = \sigma_{\ell q+1} \quad , \quad \phi_n = (\lambda^n - \lambda)^{-1}\sigma_n \quad n \neq \ell q+1$$

Per quanto riguarda la convergenza valgono i seguenti risultati [5], [6]

<u>Teorema</u> (Poincaré Dulec). Se $|\lambda|\neq 1$ allora ϕ è un diffeomorfismo analitico.

<u>Dimostrazione</u>. Si basa sul metodo delle serie maggioranti. Osserviamo che essendo $f(z)$ è olomorfa in un disco possiamo sempre operare una trasformazione in modo che sia $|f_n|<1$. Detta quindi c una costante tale che $|\lambda^n-\lambda|^{-1} \leq c$ per $n>2$ e prendendo i moduli nelle equazioni 2.10, 2.11 si trova che $|\phi_n|$ è maggiorata da c volte una somma espressa dal lato destro di 2.11 ove f_n è sostituita da 1 e ϕ_{k_j} da $|\phi_{k_j}|$. Ne segue che $|\phi_n| < \sigma_n$ dove

$$(2.16)\qquad \sigma_n = c \sum_{s=2}^{n} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=n \\ k_j\geq 1}} \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_s}\,, \quad \sigma_1 = 1$$

e perciò la funzione $\sigma(\xi) = \xi + \sum_{n\geq 2} \sigma_n \xi^n$ soddisfa l'equazione

$$(2.17)\qquad \sigma(\xi) - \xi = c \sum_{n\geq 2} \sigma^n(\xi) = c\, \frac{\sigma^2(\xi)}{1-\sigma(\xi)}$$

che è risolto da

$$(2.18)\qquad \sigma(\xi) = \frac{1+\xi - \sqrt{(1+\xi)^2 - 4\xi\,(1+c)}}{2}$$

e si vede che $\sigma(\xi)$ è olomorfa in un disco di raggio $R = 1+2c - \sqrt{(1+2c)^2-1}$.

Teorema (Siegel [7]). Se $|\lambda| = 1$ e $\lambda^n \neq 1$ per $n>1$ cioè $\lambda = e^{i\omega}$ con $\omega/2\pi$ irrazionale e se

$$(2.19)\qquad |\lambda^n - 1|^{-1} < \gamma\; n^{\mu} \qquad \mu \geq 1$$

allora esiste un diffeomorfismo analitico $\Phi(\xi)$ che coniuga $F(z)$ con la sua parte lineare.

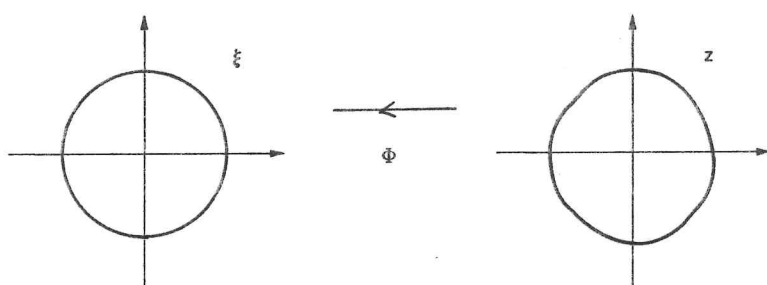
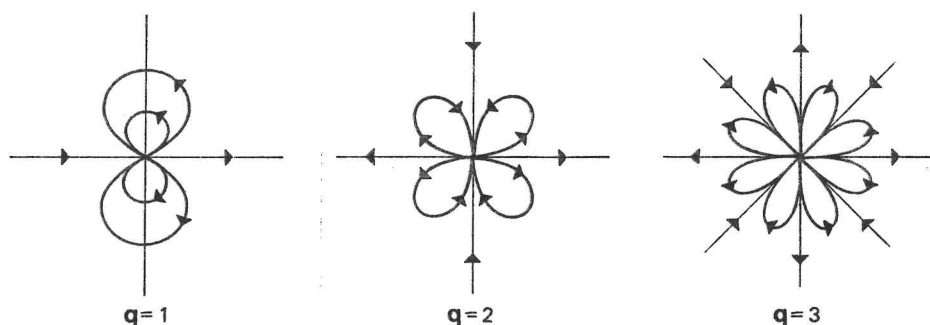
La dimostrazione di Siegel è ottenuta con il metodo delle serie maggioranti, noi daremo invece la dimostrazione usando il metodo di Newton.

Teorema (Camancho [8]). Se $|\lambda| = 1$ e $\lambda^n = \lambda$ per $n = \ell q+1$ cioè $\lambda = e^{i\omega}$ con $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{p}{q}$, p,q primi tra loro allora esiste un omeomorfismo locale Φ che preserva l'origine ($\Phi(0) = 0$) tale che

$$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(\xi) = \lambda z(1 + z^{kq})$$

per un $k>1$ intero.

Non c'è dunque coniugazione analitica ma solo un risultato di corrispondenza continua con le orbite di una particolare forma normale.

Topologia delle orbite. Quando $\lambda = e^{i\omega}$ è non risonante le orbite della forma normale sono curve chiuse

Se invece $\omega = 2\pi \frac{p}{q}$ le orbite della forma lineare sono date da q punti su un cerchio mentre quelle della forma normale sono date da curve emananti dall'origine con 2q foglie

Tale risultato dovuto a Julia può essere dimostrato costruendo il flusso interpolante. Infatti se $\xi' = W(\xi) = \lambda\xi\ (1 + \xi^q)$ si trova che in un si-

stema rotante $Z = e^{i\omega t}\xi$ il flusso $Z(t)$ ha un campo di vettori autonomo $\dot{Z} = U(Z)$ dove $U(Z) = Z^{q+1}[1 + O(Z)]$ e l'equazione dell'orbita che in coordinate polari è

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \text{ cotg } q\theta$$

ha per soluzione $\rho = |\sin \; q\theta|^{1/q}$.

3. IL METODO DI NEWTON

Consideriamo l'equazione di coniugazione

$$(3.1) \qquad \psi(\lambda\xi) - \lambda\psi(\xi) = f(\xi + \psi(\xi))$$

con $|\lambda| = 1$ e tale che 2.19 sia soddisfatta.

Per risolvere la 2.19 usiamo un metodo di Newton modificato [4] , [9]. Cominciamo col restituire 3.1 con l'equazione linearizzata

$$(3.2) \qquad \phi(\lambda\xi) - \lambda\phi(\xi) = f(\xi)$$

e definiamo $\Phi(\xi) = \xi + \phi(\xi)$ con $\phi(o) = \phi'(o) = 0$. Chiaramente la Φ non coniuga più la F con la sua parte lineare ma con $F_1(\xi) = \lambda\xi + f_1(\xi)$ dove $f_1(\xi)$ è un resto. Essendo

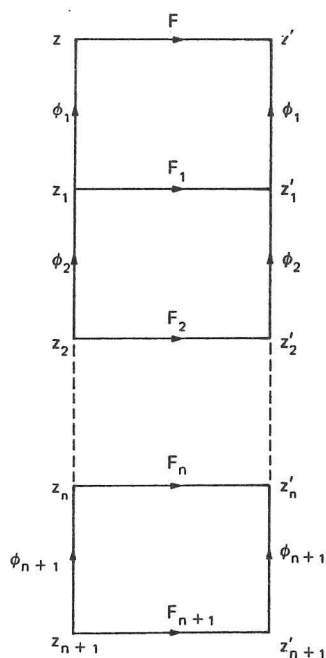
$$(3.3) \qquad \Phi^{-1} \circ F \circ \phi = F_1$$

si trova che $f_1(\xi)$ soddisfa l'equazione funzionale

$$(3.4) \qquad f_1(\xi) = \lambda\phi(\xi) - \phi(\lambda\xi + f_1(\xi)) + f(\xi + \phi(\xi))$$

che usando la 3.2 diventa

$$f_1(\xi) = \phi(\lambda\xi) - \phi(\lambda\xi + f_1(\xi)) + f(\xi+\phi(\xi)) - f(\xi) \tag{3.5}$$

Il procedimento viene quindi iterato secondo lo schema

In questo modo si ha una successione $\phi_1,\ldots,\phi_n$ di trasformazioni e di nuove mappe F_n tali che detta Ψ_n la trasformazione composta $z_n \to z$ si ha

$$\Psi_n^{-1} \text{ o } F' \text{ o } \Psi_n = F_n \text{ , } \Psi_n = \phi_1 \text{ o } \Phi_2 \text{ o} \ldots \text{o } \Phi_n \tag{3.6}$$

Ciascuna funzione Φ_n è analitica in un disco r_n dove $\{r_n\}$ una successione monotona decrescente con limite $r_\infty > 0$. Si prova che ψ_n su r_n è olomorfa e che

il limite per $n\to\infty$ è olomorfo in $|z| < r_\infty$; inoltre la successione dei resti $\{f_n\}$ converge a zero per cui la successione F_n converge a λz.

Osserviamo che

$$(3.7) \qquad f_n(z) = O(z^{2^n+1})$$

come ci si deve aspettare per i resti di un metodo di Newton. Infatti la relazione è vera per n=1 e supposto vera per n si trova $\phi_{n+1}(z) = O(z^{2^n+1})$ ed il risultato segue da 3.5 ove f, f_1, ϕ son sostituiti da f_n, f_{n+1}; ϕ_{n+1} poiché

$$(3.8) \qquad f_{n+1}(z) = f'_n(z) \; \phi_{n+1}(z) \; [1 + O(z)]$$

Notiamo che la differenza con il metodo di Newton usuale è dello stesso ordine del resto. Infatti riscrivendo 3.1 nella forma $\mathscr{F}(\psi) = 0$ dove

$$(3.9) \qquad \mathscr{F}(\Psi) = \Psi \circ L - F \circ \Psi$$

essendo $L(\xi) = \lambda\xi$ l'applicazione lineare. Allora detta I l'applicazione identità e posto $\Psi = I + \psi$ sviluppiamo il funzionale rispetto ad I univoco

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} \mathscr{F}(I + \psi) &= \mathscr{F}(I) + \mathscr{F}'(I)\psi + \mathscr{R} = L - F' + \psi\circ L - F'(I)\psi + \mathscr{R} = \\ &= -f + \psi\circ L - L\psi - [f'\psi + \mathscr{R}] \end{aligned}$$

Dunque l'equazione linearizzata è ottenuta annullando $\psi\circ L - L\psi - f$. Osservando però che allora $f'\psi$ risulta essere un $O(\|\psi\|^2)$ come il resto $\mathscr{R}$ è chiaro che non c'è differenza rispetto al metodo di Newton stesso.

Consideriamo allora l'equazione 3.1 che riscriviamo

$$(3.10) \qquad M_\lambda \, \phi(\xi) = f(\xi)$$

Osserviamo che M_λ è un operatore lineare definito nello spazio $\mathscr{A}_R$ delle funzioni olomorfe in $|z| < R$, che è a un sol valore sotto l'ipotesi $\lambda^n \neq \lambda$ per $\lambda>1$. Se inoltre la successione

$$(3.11) \qquad \frac{\log|\lambda^n - \lambda|^{-1}}{n}$$

è superiormente limitata allora applica $\mathscr{A}_\rho$ in $\mathscr{A}_{\rho^*}$ con $\rho^* < \rho$. Noi ci metteremo nell'ipotesi di Siegel 2.19 con $\mu = 1$ cioè

$$(3.12) \qquad |\lambda^n - 1| < \gamma n$$

questo al solo fine di rendere immediate le stime. Scegliamo in $\mathscr{A}_R$ le norme

$$(3.13) \qquad \|f\|_r = \sum_n |f_n| \ r^n \quad r < R$$

e definiamo

$$(3.14) \qquad \delta(r) = \|f'\|_r = \sum_{n\geq 2} n|f|_n \ r^{n-1}$$

Allora si ha che $\phi = M_\lambda^{-1} f \in \mathscr{A}_r$ poiché

$$(3.15) \qquad \|\phi\|_r = \Sigma \frac{|f_n|}{|\lambda^n - \lambda|} r^n \leq \gamma \ r \ \Sigma \ n \ r^{n-1} |f_n| < \gamma \ r \ \delta$$

Inoltre in un disco di raggio $r(1-\theta)$ stimiamo la derivata

$$(3.16) \qquad \|\phi'\|_{r(1-\theta)} = \gamma \ \Sigma \ n \ r^{n-1} |f_n| \ (n-1)(1-\theta)^{n-1} \leq \frac{\gamma\delta}{e\theta}$$

poiché $n(1-\theta)^n < (e\theta)^{-1}$ per $n\geq 1$.

Per stimare il resto occorre premettere un lemma tecnico la cui prova è data in (10)

Lemma. Se $\phi,\psi \in \mathscr{A}_r$ e $M = \max(\|\phi\|_r, \|\psi\|_r)$ e $f \in \mathscr{A}_{r+M}$ allora

$$\|f(I+\phi) - f(I+\psi)\|_r \leq \|f'\|_{r+M} \|\phi-\psi\|_r \tag{3.17}$$

Possiamo cioè enunciare il teorema sulla stima del resto.

Teorema. Se $f \in \mathscr{A}_r$ allora $f_1 \in \mathscr{A}_{r(1-\sigma-\delta)}$ dove

$$\sigma = \gamma\delta \quad , \quad \eta = \frac{\sigma\delta}{1-e^{-1}} \tag{3.18}$$

essendo e il numero di Nepero . Nel disco di raggio r_1 dato da

$$r_1 = r(1-\sigma-\eta-\hat{\sigma}) \tag{3.19}$$

dove $\hat{\sigma}$ è arbitrario perché $\sigma + \eta + \hat{\sigma} < 1$ si ha la stima

$$\|f_1'\|_{r_1} \leq \delta_1 = \frac{\eta}{2\hat{\sigma}} \tag{3.20}$$

Dimostrazione. Definiamo una sfera $\mathscr{B}$ nello spazio di Banach delle funzioni $h \in \mathscr{A}_{r(1-o-y)}$ data da $\|h\|_{r(1-\sigma-\eta)} \leq r\eta$, e consideriamo il funzionale

$$Th(\xi) = \phi(a\xi) - \phi(a\xi + h(\xi)) + f(\xi+\phi(\xi)) - f(\xi) \tag{3.20}$$

Mostriamo che T applica $\mathscr{B}$ in u ed è ivi contraente. Infatti usando 3.17

$$\|Th\|_{r(1-\sigma-y)} \leq \|\phi'\|_{r(1-\sigma-\eta)+\|h\|_{r(1-\sigma-\eta)}} \|h\|_{r(1-\sigma-\eta)} +$$

$$+ \|f'\|_{r(1-\sigma-\eta)+\|\phi\|_{r(1-\sigma-\eta)}} \|\phi\|_{r(1-\sigma-\eta)}$$

Poiché $\|h\|_{r(1-\sigma-\eta)} \leq r\eta$ e $\|\phi\|_{r(1-\sigma-\eta)} \leq \|\phi\|_r < \gamma\delta r = r\sigma$

usando 3.16 con $\theta \to \sigma$ e la definizione di η data da 3.18 si ha

$$\|Th\|_{r(1-\sigma-\eta)} \leq \frac{r\eta}{e} + \delta r\sigma = \frac{r\eta}{\hat{}} + r\eta(1-\frac{1}{e}) = r\eta$$

D'altra parte se $h_1 \in \mathscr{B}$, $h_2 \in \mathscr{B}$

$$\|Th_1-Th_2\|_{r(1-\sigma-\eta)} \leq \|\phi'\|_{r(1-\sigma-\eta)} + r\eta \; \|h_1-h_2\|_{r(1-\sigma-\eta)} \leq$$

$$\leq \frac{\gamma\delta}{e\sigma} \|h_1-h_2\|_{r(1-\sigma-\eta)} = \frac{1}{e} \|h_1-h_2\|_{r(1-\sigma-\eta)}$$

Schema iterativo. Usando il precedente risultato troviamo che lo schema iterativo è

$$\|f'\|_{r_{n+1}} \leq \delta_{n+1} \quad , \quad r_{n+1} = r_n(1-\sigma_n-\eta_n-\hat{\sigma}_n) \tag{3.21}$$

dove

$$\delta_{n+1} = \frac{\eta\eta}{2\,\hat{\sigma}_n} \quad , \quad \eta_n = \frac{\delta_n\sigma_n}{1-e^{-1}} \quad , \quad \sigma_n = \gamma\delta_n \tag{3.22}$$

con la condizione su $\hat{\sigma}$ che $\sigma_n + \eta_n + \hat{\sigma} < 1$

Poiché $\delta_{n+1} = \frac{\gamma}{2(1-e^{-1})} \frac{\delta_n^2}{\hat{\sigma}_n}$ se si sceglie $\hat{\sigma}_n = \delta_n^{1-\varepsilon}$ si trova $\delta_{n+1} \sim \delta_n^{1+\varepsilon}$

che è uno schema detto superconvergente. Noi sceglieremo invece

$$\delta_{n+1} = \chi\,\delta_n \tag{3.23}$$

$$\delta_n = \chi^n \sigma_o \ , \ \eta_n = \chi^{2n} \eta_o \ , \ \hat{\sigma}_n = \chi^n \hat{\sigma}_o \tag{3.24}$$

dove

$$\sigma_o = \gamma\delta_o \ , \ \eta_o = \frac{\gamma\delta_o^2}{1-e^{-1}} \ , \ \hat{\sigma}_o = \frac{\eta_o}{2\delta_1} = \frac{\gamma\delta_o}{\chi(1-e^{-1})} \tag{3.25}$$

avendo posto $\delta_o = \delta(r_o)$ dove $r_o \leq R$.

Si vede che $\delta_n \to o$ per $n \to \infty$ e si può dare una stima per r_n con $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r_o \prod_{n=0}^{\infty} (1-\sigma_n-\chi_n-\hat{\sigma}_n) \geq$$

$$\geq r_o \exp\{ \sum_{n=0}^{\infty} \log[1-\chi^n(\sigma_o + \eta_o + \hat{\sigma}_o)]\} =$$

$$= r_o \exp\{- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi^{nx}}{K} (\sigma_o + \eta_o + \hat{\sigma}_o)^k\} \geq$$

$$\geq r_o \exp\{- \frac{1}{1-\chi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma_o+\eta_o+\hat{\sigma}_o)^k}{k} \} = r_o(1-\sigma_o -\eta_o-\hat{\sigma}_o)^{\frac{1}{1-\chi}}$$

Per ottimizzare la stima dobbiamo cercare il massimo di $r_\infty = r_o(1-\sigma_o-\eta_o-\hat{\sigma}_o)^{\frac{1}{1-\chi}}$ rispetto ad r_o e χ dove $0<r_o<R$ e $0<\chi<1$.

<u>Convergenza di ψ_n</u> . La convergenza di questa successione si prova osservando che

$$z_o = \Phi_1(z_1) = z_1 + \phi_1(z_1)$$

$$z_1 = \Phi_2(z_2) = z_2 + \phi_2(z_2)$$

$$z_{n-1} = \Phi_n(z_n) = z_n + \phi_n(z_n)$$

sicché si ha

$$z_o = z_n + \psi_n(z_n) = z_n + \phi_1(z_1) + \dots + \phi_n(z_n)$$

Ora notiamo che Φ_n è olomorfa in $|z| < r_{n-1}$ e la sua immagine è in un disco di raggio r_{n-1}

$$\|\phi_n\| = \|I + \phi_n\|_{r_n} \leq r_n + \|\phi_n\|_{r_{n-1}(1-\sigma_{n-1})} \leq r_n + r_{n-1}\,\sigma_{n-1} \leq r_{n-1}$$

Allora le composizioni $\Phi_{n-1} \circ \Phi_n$ sono ben definite e infine $\psi_n(z)$ converge per $n \to \infty$ poiché

$$\|\psi_n\|_{r_n} \leq \sum_{k=1}^{n} \|\phi_k\|_{r_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \|\phi_k\|_{r_{k-1}(1-\sigma_{k-1})} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} r_k \sigma_k \leq r_o\,\sigma_o \sum_{k=1}^{n} \chi^k = r_o\,\sigma_o \frac{\chi}{1-\chi}$$

Possiamo osservare che le stime ottenute sono anche quantitativamente discrete; infatti per il numero d'oro $\omega = 2\pi\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ si trova $r_\infty \geq \frac{4}{81}$ 0.048 che va confrontato con il valore $r_s = .326$ del raggio di Siegel ottenuto con altri metodi [10], [11].

Estensioni. Il metodo qui descritto è stato esteso da S. Mermi al

[12], [14] al problema di Siegre in C^d.

Introducendo quindi opportune norme pesate e modificando la condizione diofantina è possibile una estensione anche al caso infinito dimensionale $d \to \infty$.

Ringraziamenti. Sono estremamente grato al Dr. Mermi per i suggerimenti e le osservazioni fatte su questo manoscritto e su tutte le informazioni bibliografiche riguardo al capitolo 2 contenute in un suo seminario tenuto all'Università di Dublino [15].

APPENDICE

Diamo qui un cenno alla costruzione del flusso interpolante nel problema di Siegel risonante. Sia data la mappa

$$z' = T(z) = e^{i\omega}[z+z^{q+1}] \quad , \quad \omega = 2\pi \frac{p}{q} \qquad \text{(A-1)}$$

con p,q interi primi tra loro. Consideriamo quindi un flusso $Z = \psi(z,t)$ con $\psi(z,o) = z$, interpolante l'orbita di T cioè tale che $\psi(z,n) = T^n(z) \; \forall n$ intero. Sia inoltre $V(Z)$ il campo vettoriale associato al flusso

$$\frac{dZ}{dt} = V(Z) \qquad \text{(A-2)}$$

Si determina allora una soluzione a $\psi(z,t)$ e $V(Z)$ per via perturbativa; si scrive cioè

$$\psi(z,t) = e^{i\omega t}z + a(t)z^{q+1} + \dots \qquad \text{(A-3)}$$

$$V(Z) = i\omega Z + b(t)\, Z^{q+1} + \dots \qquad \text{(A-4)}$$

imponendo che (A-2) sia soddisfatta con le condizioni

$$\psi(0,z) = z \qquad \psi(1,z) = T(z) \qquad \text{(A-4)}$$

La struttura di gruppo del flusso $\psi(t,z)$ assicura che l'interpolazione a $t=1$ implica l'interpolazione per $t = n$ intero. Sostituendo A3 in A4 si trova

$$V = i\omega\, e^{i\omega t}z + [i\omega a(t) + b(t)e^{i(q+1)\omega t}]z^{q+1} + \dots$$

e imponendo che A-2 sia soddisfatta all'ordine z^{q+1} si ha

$$\frac{d}{dt} a(t) = i\omega\, a(t) + b(t)\, e^{i(q+1)\omega t} \qquad \text{(A-5)}$$

da cui

$$a(t) = e^{i\omega t} \int_0^t b(s)\, e^{iq\omega s}\, ds \qquad \text{(A-6)}$$

Poiché (A-4) implica $a(1) = e^{i\omega}$ si deve avere che $\int_0^t b(s)\, e^{iq\omega s} ds=1$ e una scelta possibile è

$$b(t) = e^{-iq\omega t} \qquad \text{(A-7)}$$

Ne segue che

$$\psi(z,t) = e^{i\omega t}\, [z + t\, z^{q+1}] + \dots \qquad \text{(A-8)}$$

e quindi

$$V(Z,t) = i\omega\, Z + e^{-iq\omega t}\, Z^{q+1} + \dots \qquad \text{(A-9)}$$

Un calcolo diretto di $T^n(z)$ all'ordine z^{q+1} mostra che (A-8) interpola correttamente l'orbita della mappa.

Se ci mettiamo nel sistema rotante definito da

$$Z = e^{i\omega t}\xi \qquad \text{(A-10)}$$

il campo vettoriale $W(\xi)$ associato al flusso discreto autonomo cioè

$$\frac{d\xi}{dt} = W(\xi)$$

dove

$$W(\xi) = e^{-i\omega t}(-i\omega Z+V) = \xi^{q+1} + \dots$$

A tutti gli ordini può essere fatta una scelta analoga alla (B-7) in modo che nel sistema rotante il flusso corrisponda ad un campo autonomo.

Le orbite sono allora facilmente calcolabili poiché in coordinate polari le componenti di W sono
$W_\rho = \rho^{q+1} \cos q\theta$, $W_\theta = \rho^{q+1} \sin q\theta$ e l'equazione dell'orbita è

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \operatorname{cotg} q\theta$$

BIBLIOGRAFIA

[1] V.I. ARNOLD, "Methodes Mathematiques de la Mechanique classique" ed. MIR, (1976).

[2] V.I. ARNOLD, "Chapitres supplémentaires à la theorie des equations differentielles", ed. MIR, (1977).

[3] G.D. BIRKHOFF, "Acta Mathematica", 43, 1 (1920).

[4] C.L. SIEGEL, J. MOSER, "Lectures in celestial mechanics", Springer (1970).

[5] P. FATOU, "Sur les equations fonctionnelles", Bull. Soc. Math. France, 47, 161 (1919).

[6] G. JULIA, "Memoire su l'interation des formations rationelles", J. Math. 8, 47 (1918).

[7] C.L. SIEGEL, "Interation of analytic functions", Ann. Math. 43, 607 (1942).

[8] C. CAMACHO, Asterisque, 59-60, 83-94 (1978).

[9] A.D. BRJUNO, Trans. Moscow Math. Soc., 25, 131 (1971), 26, 199 (1972).

[10] C. LIVERANI, G. TURCHETTI, J. Stat. Phys., 45, 1071 (1986).

[11] R. DE LE LLAVE, J. Math. Phys., 24, 2118 (1983).

[12] S. MARMI, "Diohanthine conditions such KAM estimates for the Siegel Theorem in C^N". Presentato a Meccanica.

[13] S. MARMI, "Perturbation Theory for Holomorphie Diservate Dynamical Systems", in stampa nei Proceedings del Convegno di Roma sui Sistemi Dinamici, (ottobre 1986), World Scientific.

[14] S. MARMI, "The Siegel Center Problem", seminario tenuto alla Technische Universität", Berlino Ovest (maggio 1987).